

KVANTITATIVNE METODE U GRAĐEVINSKOM MENADŽMENTU

predavanja 2017/18

KORELACIJA I LINEARNA REGRESIJA

- 1. Teorija korelacije; kovarijansa, koeficijent korelacije**
- 2. Regresija; linearna regresija**

V9

Primjer 1. Sproveden je eksperiment u kojem su ispitivane čvrstoće betona koji su spravljeni od portland kompozitnih cementa klase cvstoce 32,5 (količina cementa je 300 kg/m³). Za sve betone korišten je isti granulometrijski sastav mješavina rečnog agregata za beton, a variran je vodocementni faktor v/c. Za rezultate eksperimenta koji su dati u tabeli:

1) nacrtati dijagram rasturanja (rasipanja)

2) sračunati koeficijent korelacije r_{xy} i zaključiti kakva je korelacija između ovih promjenljivih

3) definisati regresionu pravu koja će pokazati u kakvoj su vezi promjenljivje

4) sračunati standardnu grešku regresije

5) sračunati koeficijent determinacije

6) predvidjeti na osnovu linije regresije kolika se može očekivati čvrstoća betona za v/c=0,65?

Rješenje

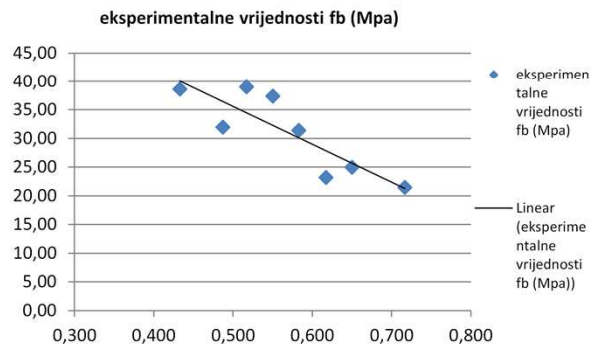
1) Dijagram rasturanja – na osnovu tačaka iz tabele nacrtat se dijagram (apscisa=v/c, a ordinata =fb)- ovdje apscisa nije prikazana od 0, nego od približno najmanjeg v/c, da bi bilo jasnije na dijagramu (linija koja je nacrtana redstavlja regresionu pravu koja je nadjena pod tačkom 3 zadatka)

2) koeficijent korelacije se racuna prema formuli (nije bitno koja ce promjenljiva biti X, a koja Y.), pa treba napraviti tabelu ispod

$$r_{xy} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - (\sum_{i=1}^n x_i) \cdot (\sum_{i=1}^n y_i)}{\sqrt{(n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2) \cdot (n \sum_{i=1}^n y_i^2 - (\sum_{i=1}^n y_i)^2)}} = -0,8564$$

Redni br.	X	Y	XY	X ²	Y ²
1	0,58	31,40	18,31	0,34	985,96
2	0,62	23,20	14,31	0,38	538,24
3	0,43	38,60	16,71	0,19	1489,96
4	0,49	32,00	15,58	0,24	1024,00
5	0,65	25,00	16,25	0,42	625,00
6	0,72	21,50	15,42	0,51	462,25
7	0,52	39,00	20,16	0,27	1521,00
8	0,55	37,40	20,57	0,30	1398,76
SUMA	4,55	248,10	137,32	2,65	8.045,17

Redni br.	vodocementni faktor V/C	eksperimentalne vrijednosti fb (Mpa)
1	0,583	31,40
2	0,617	23,20
3	0,433	38,60
4	0,487	32,00
5	0,650	25,00
6	0,717	21,50
7	0,517	39,00
8	0,550	37,40



Kako je $r=-0,8564$, zaključujemo da postoji jaka (jer je između -0,8 i -0,9) inverzna (jer je $r<0$) veza između ove dvije promjenljivje

Primjer 1. Sproveden je eksperiment u kojem su ispitivane čvrstoće betona koji su spravljani od portland kompozitnih cementa klase cvstoce 32,5 (količina cementa je 300 kg/m³). Za sve betone korišćen je isti granulometrijski sastav mješavina rečnog agregata za beton, a variran je vodocementni faktor v/c. Za rezultate eksperimenta koji su dati u tabeli:

- 1) nacrtati dijagram rasturanja (rasipanja)
- 2) sračunati koeficijent korelacije r_{xy} i zaključiti kakva je korelacija između ovih promjenljivih
- 3) **definisati regresionu pravu koja će pokazati u kakvoj su vezi promjenljive- (i nacrtati)**
- 4) sračunati standardnu grešku regresije
- 5) sračunati koeficijent determinacije
- 6) predvidjeti na osnovu linije regresije kolika se može očekivati čvrstoća betona za v/c=0,65?

Rješenje

- 3) proračun koeficijenata regresione prave:
 - najprije treba izabrati koja će promjenljiva biti objašnjavajuća (nezavisna) X, a koja zavisna Y, jer od ovoga zavisi oblik prave. Ilustracije radi urađene su obje varijante;

Za rješenje pod a)	X	Y	XY	X ²	Y ²
1	0,58	31,40	18,31	0,34	985,96
2	0,62	23,20	14,31	0,38	538,24
3	0,43	38,60	16,71	0,19	1489,96
4	0,49	32,00	15,58	0,24	1024,00
5	0,65	25,00	16,25	0,42	625,00
6	0,72	21,50	15,42	0,51	462,25
7	0,52	39,00	20,16	0,27	1521,00
8	0,55	37,40	20,57	0,30	1398,76
SUMA	4,55	248,10	137,32	2,65	8.045,17

a) v/c, (nezavisna), a fb (zavisna promjenljiva) i opsti oblik prave

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 \cdot x_i$$

– proračun koeficijenata

$$b_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n xy - \sum_{i=1}^n x \cdot \sum_{i=1}^n y}{n \sum_{i=1}^n x^2 - (\sum_{i=1}^n x)^2} = -66,6170$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \cdot \bar{x} = 68,9342$$

– jednačina regresije y od x (koristi se za estimaciju y za date vrijednosti x)

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 \cdot x_i = 68,9342 - 66,6170 \cdot x_i$$

b) fb, (nezavisna), a v/c (zavisna promjenljiva) i opsti oblik prave:

$$\hat{x}_i = a_0 + a_1 \cdot y_i$$

– proračun koeficijenata

$$a_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n xy - \sum_{i=1}^n x \cdot \sum_{i=1}^n y}{n \sum_{i=1}^n y^2 - (\sum_{i=1}^n y)^2} = -0,0112$$

$$a_0 = \bar{x} - a_1 \cdot \bar{y} = 0,9166$$

– jednačina regresije x od y (koristi se za estimaciju x za date vrijednosti y)

$$\hat{x}_i = a_0 + a_1 \cdot y_i = 0,9166 - 0,0112 \cdot y_i$$

– poslednju jednačinu možemo izaziti po y, pa se dobija

$$y_i = 81,839 - 89,286 \cdot x_i$$

Primjer 1. Sproveden je eksperiment u kojem su ispitivane čvrstoće betona koji su spravljeni od portland kompozitnih cementa klase cvstoce 32.5 (količina cementa je 300 kg/m³). Za sve betone korišćen je isti granulometrijski sastav mješavina rečnog agregata za beton, a variran je vodocementni faktor v/c. Za rezultate eksperimenta koji su dati u tabeli:

- 1) nacrtati dijagram rasturanja (rasipanja)
- 2) sračunati koeficijent korelacije r_{xy} i zaključiti kakva je korelacija između ovih promjenljivih
- 3) **definisati regresionu pravu koja će pokazati u kakvoj su vezi promjenljive- (i nacrtati)**
- 4) sračunati standardnu grešku regresije
- 5) sračunati koeficijent determinacije
- 6) predvidjeti na osnovu linije regresije kolika se može očekivati čvrstoća betona za v/c=0,65?

Rješenje

3) proračun koeficijenata regresione prave:

- najprije treba izabrati koja će promjenljiva biti objašnjavajuća (nezavisna) X, a koja zavisna Y, jer od ovoga zavisi oblik prave. Ilustracije radi urađene su obje varijante;

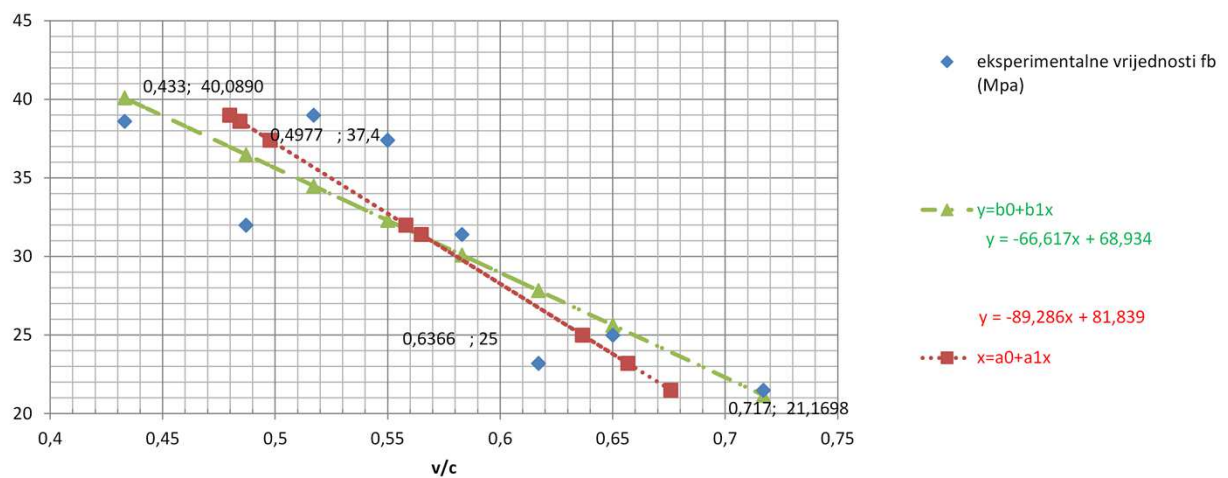
$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 \cdot x_i$$

$$\hat{y}_i = 68,9342 - 66,6170 \cdot x_i$$

$$\hat{x}_i = a_0 + a_1 \cdot y_i$$

$$y_i = 81,839 - 89,286 \cdot x_i$$

- pretpostavi se x_i i sračuna se y_i , po ovim formulama regresije (najmanje za po dvije tacke) i nacrt se prava (ovdje smo nacrtali oba oblika regresije i y od x i x od y



Primjer 1. Sproveden je eksperiment u kojem su ispitivane čvrstoće betona koji su spravljeni od portland kompozitnih cementa klase cvstoe 32,5 (količina cementa je 300 kg/m³). Za sve betone korišćen je isti granulometrijski sastav mješavina rečnog agregata za beton, a variran je vodocementni faktor v/c. Za rezultate eksperimenta koji su dati u tabeli:

- 1) nacrtati dijagram rasturanja (rasipanja)
- 2) sračunati koeficijent korelacije r_{xy} i zaključiti kakva je korelacija između ovih promjenljivih
- 3) definisati regresionu pravu koja će pokazati u kakvoj su vezi promjenljive
- 4) sračunati standardnu grešku regresije
- 5) sračunati koeficijent determinacije
- 6) predvidjeti na osnovu linije regresije kolika se može očekivati cvrstoća betona za v/c=0,65?

Rješenje

- 4) Standardna greška regresije računa se po formuli (a koriste se podaci iz proširene tabele) prikazana je za regresionu pravu $y=b_0+b_1x$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{\sum y^2 - b_0 \sum y - b_1 \sum xy}{n-2}} = 3,878(MPa)$$

bolja je regresija kod koje je s manje

- ovdje bi se moglo posmatrati i koliko se rezultata nalazi unutar prostora ograničenih sa dvije paralelene prave koje su dobijene na osnovu $y-s$ i $y+s$. Za te potrebe se dodaju jos dvije kolone u tabeli.
 - y_r – vrijednost y koja je dobijena na osnovu formule regresije
 - $e_i = y_i - y_r$ – rezidual=razlika između stvarne (eksperimentalne) i procijenjene vrijednosti

$$y_r = \hat{y}_i = b_0 + b_1 \cdot x_i \qquad \Delta_i = y_i - \hat{y}_i$$

- iz poslednje kolone se vidi da se 4 rezultata nalaze u granicama $y-s$ do $y+s$
- 5) koeficijent determinacije prikazuje odnos

$$r^2 = \frac{\sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = \frac{\text{suma kvadrata odstupanja procijenjenih vrijednosti od aritm.sredine (objašnjeni varijabilitet; objašnjen definisanom regresionom vezom)}}{\text{suma kvadrata odstupanja tacnih vrijednosti od aritm.sredine (ukupni varijabilitet)}}$$

r^2 (sračunat na osnovu koeficijenta korelacije) = $-0,8564^2 = 0,7334 = 73,34\%$ – ovoliko varijabiliteta je objašnjeno regresionom vezom vodocementnog faktora i cvrstoce betona

- 6) u jednačinu regresije se stavi $x=0,65$, pa je onda $\hat{y}_i = 68,9342 - 66,6170 \cdot 0,65 = 25,63 MPa$

Redni br.	v/c	$y_i = f_b$	y_r	Δ
1	0,58	31,40	30,10	1,30
2	0,62	23,20	27,83	-4,63
3	0,43	38,60	40,09	-1,49
4	0,49	32,00	36,49	-4,49
5	0,65	25,00	25,63	-0,63
6	0,72	21,50	21,17	0,33
7	0,52	39,00	34,49	4,51
8	0,55	37,40	32,29	5,11

Literatura

- PROSTA KORELACIONA I REGRESIONA ANALIZA
http://www.ekfak.kg.ac.rs/sites/default/files/nastava/Novi%20Studijski%20Programi/%20godina/Osnovi%20statistike/Materijali/udzbenik/11_OS_Regresija_2009.pdf
- Osnovi statistike
http://www.ekfak.kg.ac.rs/OASOE_predmet_osnovi_statistike_materijali
- Malešev M., Radonjanin V., Muravljev M. Analiza zavisnosti između cvrstoće betona pri pritisku i vodocementnog faktora , Materijali i konstrukcije 47 (2004) 1-2
- scindeks-clanci.ceon.rs/data/pdf/0543-0798/2004/0543-07980402063M.pdf